

БИНАРНЫЕ УРОКИ КАК ФОРМА ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СТАРШЕКЛАСНИКОВ

Аннотация. В статье представлена система задач реального содержания, которая служит эффективным средством интеграции математического образования; обуславливает как повышение качества математических знаний старшеклассников, так и повышение уровня сформированности умения применять эти знания в решении прикладных задач.

Ключевые слова: интеграция образования, математическое образование, векторный метод, прикладные задачи.

Abstract. The article adduces the system problems with the real content, which is an effective way to integrate math education. The system results in improving the quality of mathematical knowledge of high school students and fosters the ability to apply this knowledge in solving practical problems.

Key words: integration of education, mathematical education, vector method, real tasks.

В современном образовании учащихся математика является главным фундаментом, на котором базируются основные методы познания явлений и объектов окружающего мира. В связи с этим весьма актуальной становится задача поиска оптимальных форм, методов и средств обучения школьников построению математических моделей, наиболее точно описывающих природные процессы, и математическим методам исследования этих моделей. Необходимость решения поставленной задачи на современном этапе развития образовательного пространства обусловлена в первую очередь направленностью обучения учащихся на овладение культурно-историческим опытом, накопленным человечеством, на овладение духовными ценностями, носящими как глубоко национальный, так и общечеловеческий характер. Профильность школьного образования, ориентированность его на применение теоретических знаний к решению практических задач обуславливает не только увеличение объема, но и повышение качества усвоения учащимися знаний. Этому способствует также увеличение количества учебных дисциплин и стремление педагогов как можно подробнее и доступнее представить современные научные достижения. В результате возникает противоречие между растущим объемом знаний и ограниченностью учебного времени, предназначенного для овладения ими. Разрешению данного противоречия в значительной мере способствует интеграционная технология проведения уроков. В педагогической науке выделяют два вида интеграции: горизонтальную – объединение сходного материала в разных учебных предметах и вертикальную – объединение одним преподавателем в своем предмете материала, который тематически повторяется в разных учебных предметах на разном уровне сложности [1].

Основной формой учебного процесса, в которой используются оба уровня интеграции, в настоящее время является бинарная форма обучения. В общем смысле бинарное обучение предполагает такую организацию учеб-

ного процесса, в которой одновременно достигаются цели познавательной деятельности и формируются практические умения и навыки. Это обучение является особым видом синтетического обучения, которому присущи закономерности, ранее не изучавшиеся педагогикой.

Бинарный урок можно также рассматривать как одну из форм интеграции теоретического и производственного обучения. Такие уроки позволяют интегрировать знания из разных областей для решения одной проблемы, дают возможность обучения школьников способам применения полученных знаний на практике. В настоящее время большое внимание уделяется задачам, обуславливающим формирование в сознании учащихся логических приемов мышления, способствующим обучению школьников решению проблем различного характера, анализу, сравнению и сопоставлению путей решения этих проблем. Такой подход к построению уроков позволяет обучающимся акцентировать внимание на содержании своих высказываний, построении логической цепочки доказательной основы математических рассуждений.

Как правило, бинарные уроки проводятся на этапе применения изученного теоретического материала к решению прикладных задач, для проведения практических работ, семинаров, бесед и т.п. На таких уроках решаются практически значимые задачи на основе межпредметного взаимодействия. Система таких задач, построенная в соответствии с поставленными целями, служит средством повышения интереса к изучению предмета, например математики, физики или химии; способствует развитию логического мышления и аналитических способностей; формирует умения переносить знания из одной научной области в другие, не изучавшиеся ранее.

Организация бинарного преподавания векторной алгебры представляет интерес в плане обучения школьников приемам математического обоснования исследований явлений окружающего мира, повышения интереса учащихся к математике, физике, химии и т.д.; позволяет проводить параллель между теоретическими математическими выкладками и практическими их применениями, интегрировать знания учащихся о природе, развивать у них исследовательские способности, придавать знаниям практическую направленность.

Некоторые физические процессы требуют для описания их действия указания точного направления. Наиболее распространенным способом указания направления действия явления или объекта является заимствованное из математики понятие «вектор». Существует несколько способов определения вектора. В школьном курсе геометрии вектор определяется как направленный отрезок. Сложнее вводится понятие угла между векторами. До сего времени учащиеся изучали угол как геометрическую фигуру. Теперь же необходимо учителю сформировать в сознании учащихся понятие угла между векторами, который не является геометрической фигурой и представляет собой некоторое положительное число. Напомним один из подходов введения угла между векторами. Рассмотрим два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1).



Рис. 1

От произвольной точки O отложим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Лучи OA и OB определяют угол AOB . Мера этого угла и называется углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для обозначения угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используют символ $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Если один из векторов нулевой, то угол между ними считается неопределенным. Если $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными. Заметим, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то угол между ними равен нулю, если же векторы противоположны, то угол между ними равен 180° .

Теперь рассмотрим понятие скалярного произведения векторов. Отдельно следует напомнить учащимся, что результат скалярного произведения не является вектором (знак вектора не ставится – наиболее частая ошибка обучающихся).

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Кратко рассмотрим свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это свойство называется коммутативностью скалярного произведения.

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Это свойство называется дистрибутивностью скалярного произведения.

3. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является нулевым, то их скалярное произведение считается равным нулю.

4. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они взаимно перпендикулярны [2].

Поясним физический смысл скалярного произведения векторов на примере понятия «работа». Пусть под действием силы $\vec{F}$ материальная точка перемещается из некоторой точки O в точку X , такую, что $\overrightarrow{OX} = \vec{S}$, тогда работа по определению равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ (рис. 2). Таким образом, физический смысл скалярного произведения состоит в том, что скалярное произведение двух ненулевых векторов численно равно работе A силы $\vec{F}$ по перемещению $\vec{S}$ тела из положения O в точку X .

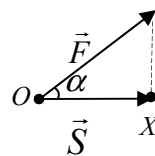


Рис. 2

Распишем скалярное произведение. Для этого перейдем к проекциям векторов силы и перемещения на ось $\vec{OX}$. Тогда работа A силы $\vec{F}$ будет равна

$$A = |\vec{S}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos \alpha, A = \vec{S} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Отметим, что скалярное произведение векторов может быть различным по знаку:

$$A > 0, \text{ если } 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \cos \alpha > 0.$$

$$A < 0, \text{ если } 90^\circ < \alpha = 180^\circ, \cos \alpha < 0.$$

$$A = 0, \text{ если } \alpha = 90^\circ.$$

Если в условии задачи тело движется по горизонтали, то (при условии, что все вектора сил перенесены и приложены к центру тяжести для наглядности) это может быть показано так (рис. 3).

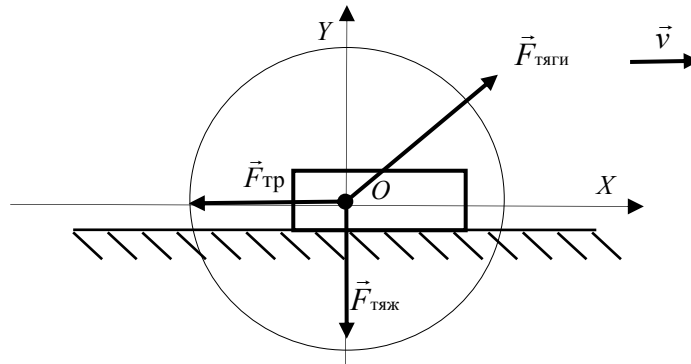


Рис. 3

Сила тяги попадает в первую четверть единичной окружности с центром, совпадающим с центром тяжести тела: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\cos \alpha > 0$, $A > 0$ (работа силы тяги положительна).

Сила трения находится во второй четверти, $90^\circ < \alpha = 180^\circ$, $\cos \alpha < 0$, $A < 0$ (т.е. работа силы трения всегда отрицательна).

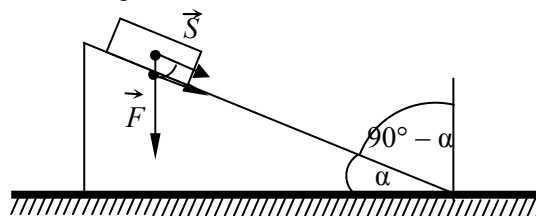
Сила тяжести (а также реакции опоры) перпендикулярна оси OX , $\alpha = 90^\circ$, $A = 0$ (работа сил тяжести и реакции опоры в данном случае равна нулю).

С целью расширения знаний учащихся по применению скалярного произведения к решению прикладных задач мы считаем целесообразным использовать следующие задачи прикладного характера [3].

Задача 1. Тело массой 10 кг соскользнуло по наклонной плоскости длиной 1,4 м. Определить работу силы тяжести, если угол наклона плоскости к горизонту 30° .

Дано:
 $m = 10 \text{ кг}$
 $S = 1,4 \text{ м}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $g \approx 10 \text{ м/с}^2$
 $A = ?$

Решение. Сделаем чертеж.



Работу силы тяжести можно определить как скалярное произведение вектора силы тяжести на перемещение, сделанное телом под действием этой силы:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{S}).$$

Угол $\angle(\vec{F}, \vec{S})$, как видно на чертеже, равен $(90^\circ - \alpha)$.

Вычисляем: $A = 10 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 1,4 \text{ м} \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = 140 \cdot 0,5 \text{ Дж} = 70 \text{ Дж}$.

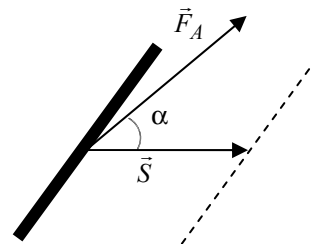
Ответ: работа силы тяжести при движении по наклонной плоскости равна 70 Дж.

Задача 2. Проводник находится в однородном магнитном поле (проводник закреплен и может двигаться только в горизонтальной плоскости). Какую работу совершил источник тока, если под действием силы, равной 0,08 Н и направленной под углом 30° , проводник переместился на 10 см?

Дано:
 $F_A = 0,08 \text{ Н}$
 $S = 10 \text{ см}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $A = ?$

СИ:
 0,1 м

Решение. Построим чертеж.



Сила Ампера – это сила,двигающая проводник в магнитном поле.

Работу этой силы можно определить как скалярное произведение вектора силы Ампера на сделанное телом перемещение под действием этой силы:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \angle(\vec{F}, \vec{S}).$$

$$A = 0,08 \text{ Н} \cdot 0,1 \text{ м} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,008 \text{ Дж} \approx 0,0069 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A \approx 0,0069 \text{ Дж}$.

Повторение темы «Скалярное произведение векторов» можно провести во время прохождения темы «Мощность» в курсе физики. Мощностью называют отношение работы A к интервалу времени Δt , за который эта работа совершена. Поэтому при равномерном движении $N = \frac{A}{\Delta t}$. Поскольку $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$,

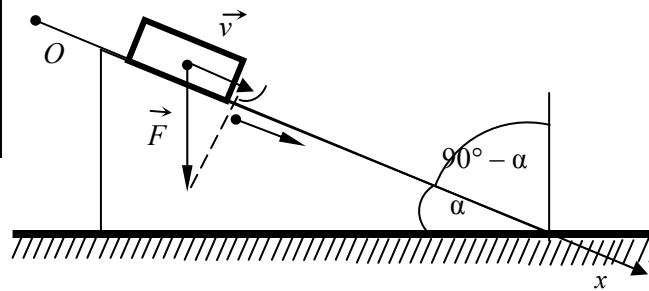
то $N = \frac{\vec{F} \cdot \vec{S}}{\Delta t}$. Так как $\vec{v} = \frac{\vec{S}}{\Delta t}$, то $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Таким образом получаем, что $N = F \cdot v \cdot \cos \alpha$.

Задача 3. Трактор массой 1 т, развивающий мощность 6 кВт, поднимается в гору с постоянной скоростью 5 м/с. Определите угол наклона горы к горизонту. Силу сопротивления движению не учитывать.

Дано:
 $m = 1 \text{ т}$
 $N = 6 \text{ кВт}$
 $v = 5 \text{ м/с}$
 $g \approx 10 \text{ м/с}^2$
 $\alpha = ?$

СИ:
 1000 кг
 6000 Вт

Решение. Сделаем чертеж.



Мощность двигателя $N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{N}{Fv} = \frac{N}{F_{\text{тяж}} \cdot v} = \frac{N}{mgv}.$$

Вычисляем: $\cos \alpha = 6000 \text{ Вт} / (1000 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 5 \text{ м/с}) = 0,12$; т.е. $\alpha = 83^\circ$.

Ответ: $\alpha = 83^\circ$.

На плоскости зададим прямоугольную систему Oxy и два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть относительно системы координат Oxy эти векторы заданы своими координатами $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. Из этой формулы легко получается, что $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, а из определения скалярного произведения векторов получаем, что

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}}.$$

Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты. Как известно, его можно разложить на два независимых движения: равномерное прямолинейное, происходящее в горизонтальном направлении со скоростью v_x , равной начальной скорости бросания v_0 ($v_x = v_0$), и свободное падение с высоты, на которой находилось тело в момент бросания, с ускорением $\vec{g}$.

Для описания этого движения на плоскости выбирают прямоугольную систему координат Oxy (рис. 4). Траекторией движения является ветвь параболы. Запишем уравнения движений по осям Ox и Oy :

$$Ox: x = x_0 + v_0 t;$$

$$Oy: y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Скорость тела в любой точке траектории можно определить по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Движение тела, брошенного под углом α к горизонту, также можно разложить на два независимых движения: равномерное прямолинейное, происходящее в горизонтальном направлении с начальной скоростью $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$,

и свободное падение с начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, где α – угол между направлениями вектора скорости v_0 и осью Ox .

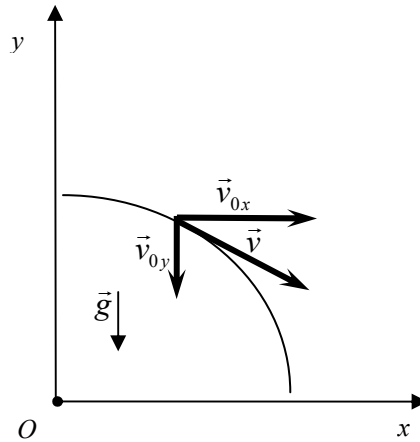


Рис. 4

Траекторией такого движения является парабола (рис. 5).

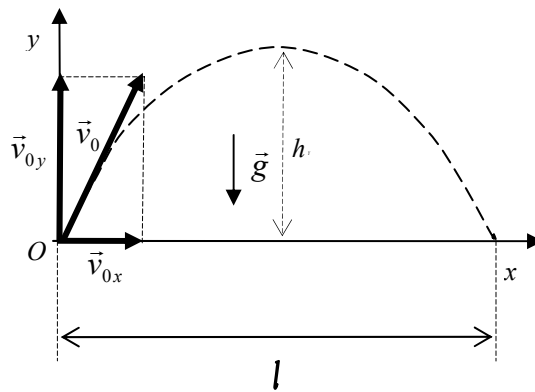


Рис. 5

Уравнения движений примут вид

$$\begin{aligned} Ox: x &= x_0 + v_{0x}t, \\ Oy: y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Скорость тела в любой точке траектории

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - gt$.

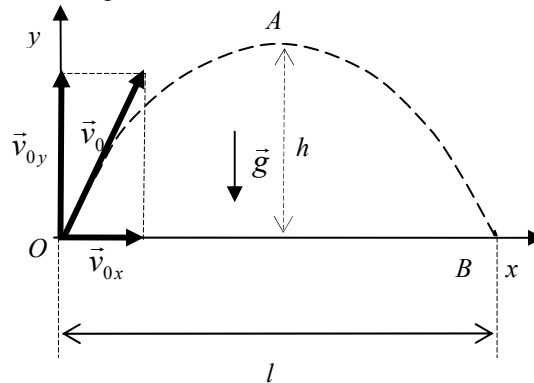
Формулы высоты, дальности и времени полета получены с помощью проекций уравнений движения на оси Ox и Oy с учетом выбора направления осей координат.

Задача 4. Струя воды в гидромониторе вылетает из ствола со скоростью 50 м/с под углом 30° к горизонту. Найти дальность полета и наибольшую высоту подъема струи.

Дано:
 $v_0 = 50$ м/с
 $\alpha = 30^\circ$

$h - ?$
 $l - ?$

Решение. Сделаем чертеж.



Выберем прямоугольную систему координат Oxy с началом отсчета в точке O вылета струи.

Вдоль оси Ox движение равномерное прямолинейное, так как на струю воды действует только сила тяжести, направленная вертикально вниз.

Вдоль оси Oy струя воды движется равнозамедленно до верхней точки траектории (точки A), а вниз – равноускоренно с ускорением свободного падения, направленным вертикально вниз в любой точке траектории. С учетом этого уравнения движения струи воды имеют вид

$$\begin{aligned} Ox: x &= v_{0x}t; \\ Oy: y &= v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \text{ так как } y_0 = 0. \end{aligned}$$

Скорость движения струи по оси Oy до точки A (вершина параболы) изменяется по закону

$$v_y = v_{0y} - gt,$$

где $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Для точки A $v_y = 0$; $y = h$; $t = t_1$, где t_1 – время движения до максимальной точки.

Тогда формула скорости примет вид

$$0 = v_{0y} - gt_1,$$

откуда

$$v_{0y} = gt_1 \text{ или } v_0 \sin \alpha = gt.$$

Следовательно, $t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$.

Найдем высоту подъема струи:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g};$$

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}; \quad h = \left[\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м} \right].$$

Для точки падения струи воды (точки B) на землю $t = t_2$; $y = 0$; $x = 1$.
Следовательно, уравнение координаты y примет вид

$$0 = v_{0y}t - \frac{gt_2^2}{2}; \Rightarrow v_{0y}t_2 = \frac{gt_2^2}{2},$$

откуда время полета струи

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Найдем дальность полета:

$$l = v_{0x}t_2, v_{0x} = v_0 \cos \alpha;$$

$$l = \frac{2v_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}, \text{ так как } 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha.$$

$$\text{Проверяем: } l = \left[\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м} \right].$$

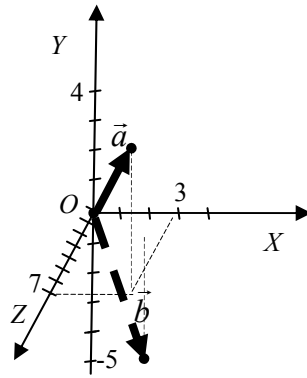
$$\text{Вычисляем: } h = \frac{50^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9,8} = \frac{50^2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 9,8} \approx 32 \text{ м}, \quad l = \frac{50^2 \cdot \sin 60^\circ}{9,8} \approx 221 \text{ м}.$$

Ответ: $h \approx 32 \text{ м}, l \approx 221 \text{ м}$.

В целях формирования наиболее полного понимания учащимися скалярного произведения рекомендуем аналогичные темы в курсе математики и физики проходить одновременно, сочетая задачи планиметрического характера с задачами стереометрического плана. Приведем примеры из курса математики, дополняющие сказанное выше и расширяющие, но не повторяющие пройденное ранее в курсе физики. Используя знания старшеклассников о координатном задании скалярного произведения векторов на плоскости, можно с их помощью на гипотетическом уровне сформулировать утверждения о вычислении скалярного произведения двух векторов в пространстве, длины вектора, угла между векторами, заданными своими координатами. Учителю необходимо ознакомить учащихся и с методом обоснования истинности этих формул. Для того чтобы закрепить теоретические знания старшеклассников о скалярном произведении векторов в пространстве, можно использовать следующие задачи.

Задача 5. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

Дано: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$	Решение. Находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0.$ Поскольку $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.
--	---



Ответ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Задача 6. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$.
При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

Дано:	Решение. Находим скалярное произведение этих векторов:
$\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 7m - 28.$
$\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$	Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
$\vec{a} \perp \vec{b}$	Отсюда $7m - 28 = 0$, т.е. $m = 4$.
$m = ?$	

Ответ: $m = 4$.

Задача 7. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Дано:	Решение. Имеем
$ \vec{a} = 2$, $ \vec{b} = 3$,	$(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 10\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} +$
$\vec{a} \perp \vec{b}$	$+ 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 10 \vec{a} ^2 - 3 \vec{b} ^2 = 40 - 27 = 13.$
$(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = ?$	

Ответ: $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 13$.

Задача 8. Определить угол между векторами $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Дано:	Решение. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi$, то $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$.
$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$	Имеем $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 8$,
$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$	$ \vec{a} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $ \vec{b} = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$	Следовательно, $\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ и $\varphi = \arccos \frac{2}{7}$.

Ответ: $\varphi = \arccos \frac{2}{7}$.

Задача 9. Найти длину вектора $\vec{F} = 3\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $|\vec{r}| = 1$, $\angle(\vec{q}, \vec{r}) = 120^\circ$, $\angle(\vec{p}, \vec{r}) = 60^\circ$.

Дано:	Решение. В процессе решения этой задачи важно обратить внимание учащихся на тот факт, что $ \vec{F} = \sqrt{\vec{F}^2}$.
$\vec{F} = 3\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$	Поскольку $\vec{F}^2 = \vec{F} \cdot \vec{F}$, то $ \vec{F} = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}}$.
$ \vec{p} = 2$	Далее находим, что
$ \vec{q} = 3$	$\vec{F} \cdot \vec{F} = (3\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r})^2 =$
$ \vec{r} = 1$	$= 9\vec{p}^2 + 4\vec{q}^2 + \vec{r}^2 + 12\vec{p} \cdot \vec{q} + 6\vec{p} \cdot \vec{r} + 4\vec{q} \cdot \vec{r}.$
$\angle(\vec{q}, \vec{r}) = 120^\circ$	
$\angle(\vec{p}, \vec{r}) = 60^\circ$	
$ \vec{F} - ?$	

Так как $\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 = 4$, $\vec{q}^2 = |\vec{q}|^2 = 9$, $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = 1$,

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \angle(\vec{q}, \vec{r}) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = |\vec{p}| |\vec{r}| \cos \angle(\vec{p}, \vec{r}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = |\vec{q}| |\vec{r}| \cos \angle(\vec{q}, \vec{r}) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2},$$

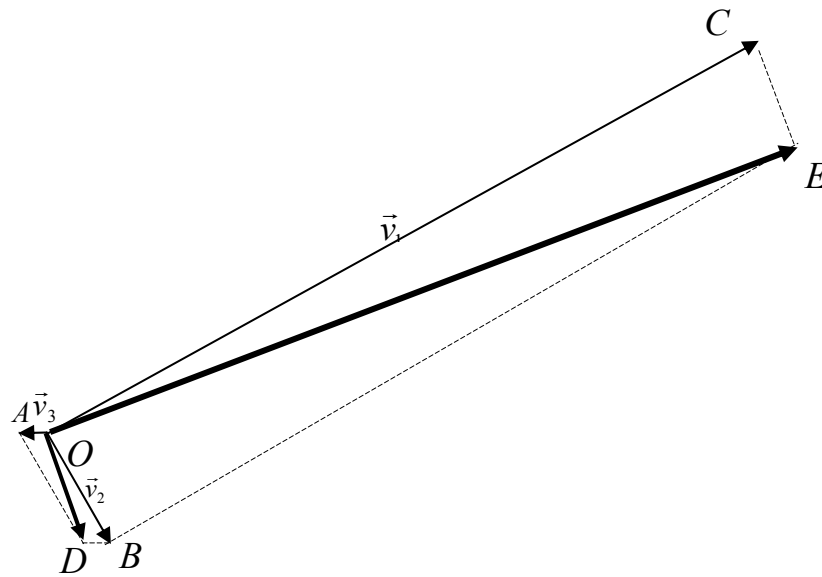
то

$$|\vec{F}| = \sqrt{9 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{36 + 36 + 1 + 36 + 6 - 6} = \sqrt{109}.$$

Ответ: $|\vec{F}| = \sqrt{109}$.

Задача 10. Лебедь, рак и щука тянут воз. Лебедь со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, рак со скоростью $v_3 = 1$ км/ч, щука со скоростью $v_2 = 5$ км/ч, а углы между направлениями этих скоростей соответственно равны $\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 60^\circ$, $\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = 120^\circ$, $\angle(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = 120^\circ$. Найти скорость воза.

Дано:	Решение. Сделаем чертеж.
$\vec{v}_1 = 30$ км/ч	По правилу параллелограмма находим сумму скоростей рака и щуки. Имеем $O\vec{D} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, затем, снова применяя правило параллелограмма, находим сумму скоростей лебедя, рака и щуки:
$\vec{v}_3 = 1$ км/ч	$O\vec{E} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3.$
$\vec{v}_2 = 5$ км/ч	Тогда скорость воза равна квадратному корню из скалярного квадрата вектора $\vec{v}$, т.е. $ \vec{v} = \sqrt{\vec{v}^2}$. Поскольку
$\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 60^\circ$	$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, то
$\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = 120^\circ$	$ \vec{v} = \sqrt{(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)^2} = \sqrt{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + \vec{v}_3^2 + 2\vec{v}_1\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1\vec{v}_3 + 2\vec{v}_2\vec{v}_3}.$
$\angle(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = 120^\circ$	
$ \vec{v} - ?$	



Так как

$$\vec{v}_1^2 = |\vec{v}_1|^2 = 900, \quad \vec{v}_2^2 = 1, \quad \vec{v}_3^2 = 25,$$

$$\vec{v}_1 \vec{v}_2 = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15, \quad \vec{v}_1 \vec{v}_3 = 150 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -75, \quad \vec{v}_2 \vec{v}_3 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2,5,$$

то

$$|\vec{v}| = \sqrt{900 + 1 + 25 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot (-75) + 2 \cdot (-2,5)} = \sqrt{569 - 155} = \sqrt{414} \approx 20,3 \text{ м/с.}$$

Ответ: $|\vec{v}| \approx 20,3 \text{ м/с.}$

В ходе решения данной задачи важно отметить, что в общем случае ледь, рак и щука могут тянуть воз в направлениях, не лежащих в одной плоскости. Значит, эта прикладная задача относится к числу задач стереометрического характера, решаемых векторным методом.

Таким образом, используя бинарные уроки, мы формируем в сознании старшеклассников более устойчивые представления об основных понятиях и методах векторной алгебры, приемах составления математических моделей реальных процессов. Методическая ценность задач, решаемых на бинарных уроках, заключается в том, что на их примере мы формируем у учащихся не только умение применять знания векторной алгебры к исследованию прикладных задач, но и, самое главное, расширяем знания обучаемых о фундаментальных составляющих векторного метода. Методологическое значение предлагаемой системы задач заключается в том, что посредством этих задач мы учим старшеклассников, как и в какой ситуации использовать такие приемы научного познания, как анализ, синтез, обобщение, аналогия и сравнение. По нашим наблюдениям, ценность предлагаемых задач заключается еще и в том, что в процессе поиска их решения у обучаемых формируются более глубокие представления о математических понятиях, необходимости их изу-

чения, возможных направлениях их использования как в практической деятельности, так и при изучении дисциплин смежного характера.

Список литературы

1. **Капкаева, Л. С.** Задачи как средство реализации интегративной функции обучения математике в средней школе / Л. С. Капкаева // Гуманизация математического образования в школе и вузе : межвуз. сб. науч. тр. – Саранск : Поволжск. отд. РАО МГПИ им. М. Е. Евсеева, СВМО, 2002. – Вып. 2. – С. 57–68.
2. **Дорофеев, С. Н.** Векторный метод моделирования задачных ситуаций : учеб. пособие для студентов / С. Н. Дорофеев, Е. А. Емелина. – Пенза, 2010. – 140 с.
3. Физика. Задачник. 10–11 кл. : пособие для общеобразоват. учреждений / А. П. Рымкевич. – 10-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2006. – 188 с.

Емелина Елена Александровна
преподаватель, МОУ «Лицей
современных технологий
управления № 2»

E-mail: el.emelina@yandex.ru

Emelina Elena Alexandrovna
Teacher, Lyceum of modern
administration technologies № 2

УДК 372.851

Емелина, Е. А.

Бинарные уроки как форма повышения качества математического образования старшеклассников / Е. А. Емелина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 138–150.